Экономичность систем счисления с показательной весовой функцией

x - основание системы счисления,

$n = r \cdot x$ - количество знаков необходимых для записи кода (числа), например, для записи одного десятичного разряда нужно 10 знаков от 0 до 9 (1 декада), а для записи трёх десятичных разрядов нужно 3*10=30 знаков (3 декады),

Из комбинаторики известно, что по правилу умножения, количество размещений с повторениями (выборок с возвращением) из n по k, обозначаемое $\bar{A}_n^k$, равно [2]:

$$\bar{A}_n^k = n^k .$$

В нашем случае $n = x$, $k = n/x$ и

$y_1 = \bar{A}_n^k = \bar{A}_x^{n/x} = x^{n/x}$ - число представляемых кодов (чисел) (зависит от числа знаков — n).

Пример 1.
30-тью знаками в десятичной системе счисления можно записать

$y_1 = 10^{30/10} = 10^3 = 1000$ кодов (чисел) от 0 до 999.

Пример 2.
12-ю знаками
в двоичной системе счисления можно записать $2^6 = 64$ числа (кода),
в е-ричной системе счисления можно записать $e^{12/e} = e^{4,415} = 82,645$ числа (кода),
в троичной системе счисления можно записать $3^4 = 81$ число (код),
в четверичной системе счисления можно записать $4^3 = 64$ числа (кода),
в шестеричной системе счисления можно записать $6^2 = 36$ чисел (кодов),
в двенадцатиричной системе счисления можно записать $12^1 = 12$ чисел (кодов).

Полученная функция $y_1 = x^{n/x}$ имеет один существенный недостаток — она и её график зависят от числа знаков — n, что затрудняет построение графиков. Фактически функция является семейством (множеством) функций при разных количествах выбранных разрядов, т.е. теорема в изложении Фомина не обобщена для любого n.

Избавиться от этой зависимости можно взяв от этой функции натуральный логарифм и поделив результат на n:

$y_2 = \ln(y_1) = (n/x) \cdot \ln(x)$ - натуральный логарифм числа представляемых кодов (чисел) (зависит от числа знаков - n),

$y_3 = y_2 / n = \ln(x)/x$ - удельный (на число знаков) натуральный логарифм числа представляемых кодов (чисел) (не зависит от числа знаков — n).

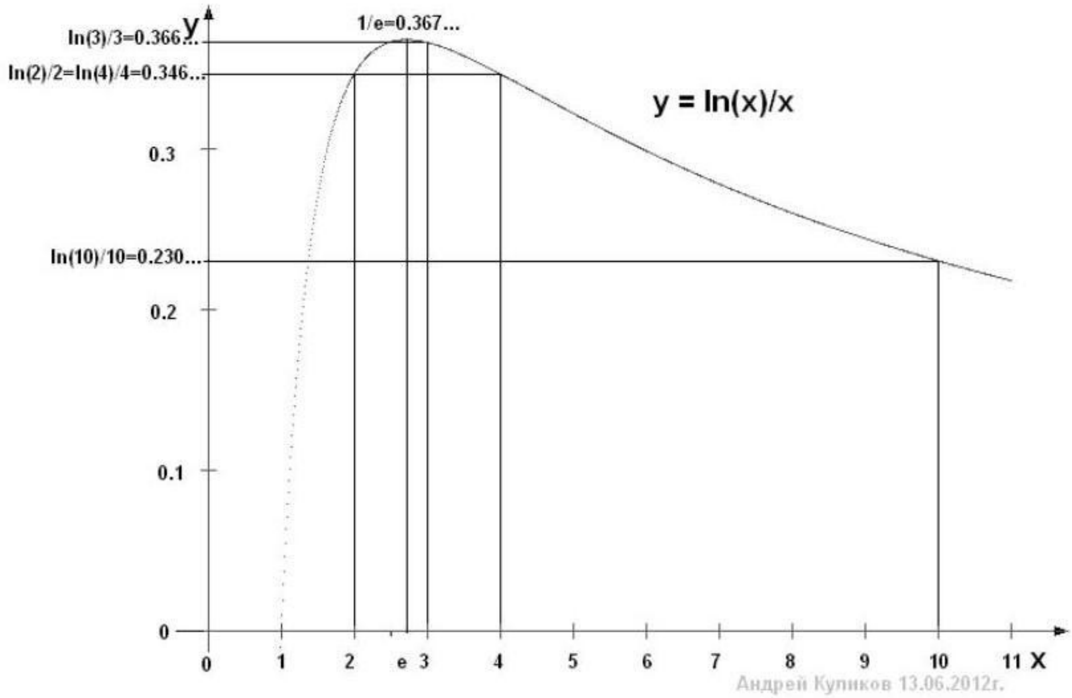

Рис. 1. График зависимости удельного (на число знаков) натурального логарифма числа представляемых кодов (чисел) от основания системы счисления.

На графике видно, что наибольшее удельный (на число знаков) натуральный логарифм числа представляемых кодов (чисел) (1/e=0,367...) имеет система счисления с основанием равным числу Эйлера e=2,71... (основание натуральных логарифмов). Это значит, что таблицы логарифмов будут иметь наименьший объём при основании логарифмов равном числу e. Именно, для уменьшения объёма таблиц логарифмов, Джон Непер интуитивно выбрал основание близкое к числу e.

Из систем счисления с целочисленными основаниями наибольший удельный (на число знаков) натуральный логарифм числа представляемых кодов (чисел) (ln(3)/3=0,366...) имеет троичная система счисления с основанием равным 3. Двоичная и четверичная системы счисления с основаниями 2 и 4 имеют одинаковый удельный (на число знаков) натуральный логарифм числа представляемых кодов (чисел) (ln(2)/2=ln(4)/4=0,346...) и занимают второе место после троичной системы счисления.

Необходимыми условиями существования экстремума функции являются существование первой производной и её равенство нулю.
Первая производная функции y=ln(x)/x равна:

$$dy/dx = d(\ln(x)/x)/dx = 1/x^2 - \ln(x)/x^2 .$$

Приравняв её нулю получим:

$$1/x^2 - \ln(x)/x^2 = 0,$$
$$\ln(x)/x^2 = 1/x^2,$$
$$\ln(x) = 1,$$
$$x_0 = e.$$

Достаточными условиями существования локального максимума являются $f'_{+x0} < 0$ и $f'_{-x0} > 0$. Так как слева от точки $x_0 = e$ производная положительная, а справа отрицательная, то, в точке $x_0 = e \approx 2{,}718$ функция $f(x) = \ln(x)/x$ действительно имеет строгий локальный максимум равный ln(e)/e=1/e=0,367... .

Список литературы:

1. Фомин С. В. Системы счисления . - 5-е изд. - М.:Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. - 48 с. - (Попул. лекции по мат.) § 14. Об одном замечательном свойстве троичной системы, стр.37.
2. Википедия. Размещение. Размещение с повторениями.

Куликов А.С., Россия-Русь, Москва, Царицыно, версия от 6.03.2018 г.