Экономичность систем счисления с показательной весовой функцией

x - основание системы счисления,
r - количество разрядов (позиций) в записи (коде) числа,
$n = r \cdot x$ - количество знаков необходимых для записи кода (числа), например, для записи одного десятичного разряда нужно 10 знаков от 0 до 9 (1 декада), а для записи трёх десятичных разрядов нужно 3*10=30 знаков (3 декады),

Из комбинаторики известно, что по правилу умножения, количество размещений с повторениями (выборок с возвращением) из n по k, обозначаемое $\bar{A}_n^k$, равно [2]:

$$\bar{A}_n^k = n^k .$$

В нашем случае $n = x$, $k = n/x$ и

$y_1 = \bar{A}_n^k = \bar{A}_x^{n/x} = x^{n/x}$ - число представляемых кодов (чисел) (зависит от количества знаков — n).

Пример 1.
30-тью знаками в десятичной системе счисления можно записать

$y_1 = 10^{30/10} = 10^3 = 1000$ кодов (чисел) от 0 до 999.

Пример 2.
12-ю знаками
в двоичной системе счисления можно записать $2^6 = 64$ числа (кода),
в е-ричной системе счисления можно записать $e^{12/e} = e^{4,415} = 82{,}645$ числа (кода),
в троичной системе счисления можно записать $3^4 = 81$ число (код),
в четверичной системе счисления можно записать $4^3 = 64$ числа (кода),
в шестеричной системе счисления можно записать $6^2 = 36$ чисел (кодов),
в двенадцатиричной системе счисления можно записать $12^1 = 12$ чисел (кодов).

Фомин С.В. в своей книжке не приводит ссылки на первоисточник этой теоремы, а Кушнеров А. в статье «Троичная цифровая техника» [3] приписывает эту теорему одному из основателей информатики Джону фон Нейману (John von Neumann).

В работе [4] авторы на странице 7 пишут: «(We will not discuss here the ternary possibilities of a positive-or-negative-or-no pulse system and their relationship to questions of reliability and checking, nor the very intresting possibilities of carrier frequency modulation.)», из чего следует, что авторы работы знали о существовании троичной трёхуровневой (3-Level LevelCodedTernary, 3L LCT [5]) системы, но никаких её соотношений с двоичной, с десятичной и со всеми другими системами и никаких теорем с доказательствами не приводят. Никаких других доказательств в авторстве теоремы из книжки Фомина С.В. Джона фон

Неймана не найдено, сам же Кушнеров А., заявляя об авторстве Джона фон Неймана, ссылается не на какую либо статью Джона фон Неймана, а на книжку Фомина С.В. и приводит и формулу и программно перерисованный график из книжки Фомина С.В.

Выведенная в книжке Фомина С.В. функция $y_1 = x^{n/x}$ имеет один существенный недостаток — она и её график зависят от количества знаков — n, что затрудняет построение графиков. Фактически функция является семейством (множеством) функций для разных количеств знаков - n, т.е. теорема в изложении Фомина не обобщена для любого количества знаков - n.

Избавиться от этой зависимости можно взяв от обеих частей уравнения натуральный логарифм и поделив обе части уравнения на количество знаков - n:

$y_2 = \ln(y_1) = (n/x) \cdot \ln(x)$ - натуральный логарифм числа представляемых кодов (чисел) (зависит от количества знаков - n),

$y_3 = y_2/n = \ln(x)/x$ - удельный (делённый на количество знаков) натуральный логарифм числа представляемых кодов (чисел) (не зависит от количества знаков — n).

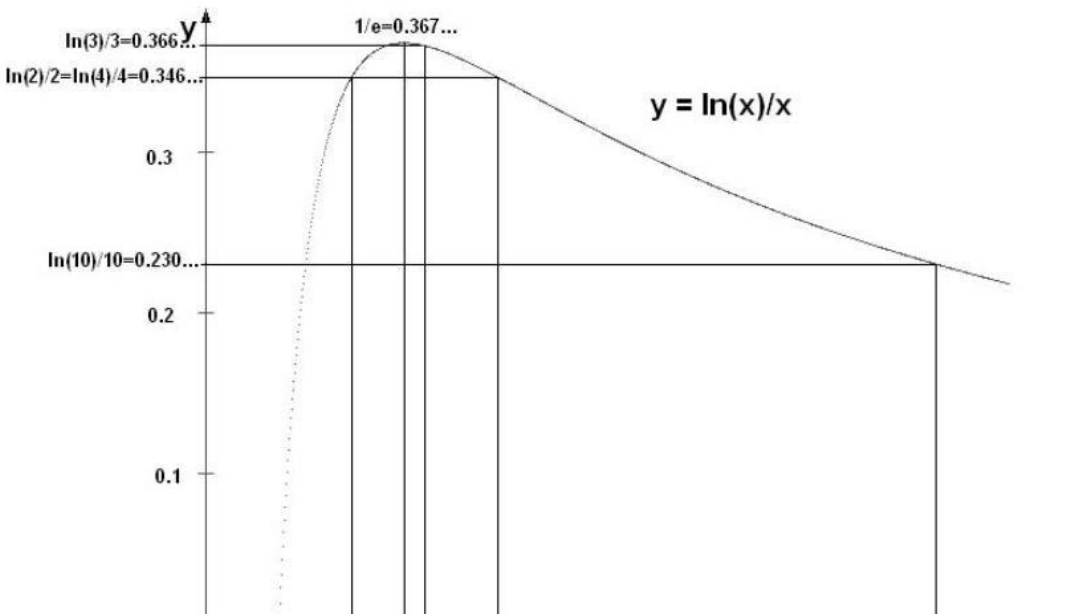

Рис.1. График зависимости удельного (делённого на количество знаков) натурального логарифма числа представляемых кодов (чисел) от основания системы счисления.

На графике видно, что наибольший удельный (делённый на количество знаков) натуральный логарифм числа представляемых кодов (чисел) (1/e=0,367...) имеет система счисления с основанием равным числу Эйлера e=2,71... (основание натуральных логарифмов). Это значит, что таблицы логарифмов будут иметь наименьший объём при основании логарифмов равном числу e. Именно, для уменьшения объёма таблиц логарифмов, Джон Непер интуитивно выбрал основание близкое к числу e.

Из систем счисления с целочисленными основаниями наибольший удельный (делённый на количество знаков) натуральный логарифм числа представляемых кодов (чисел) (ln(3)/3=0,366...) имеет троичная система счисления с основанием равным 3. Двоичная и четверичная системы счисления с основаниями 2 и 4 имеют одинаковый удельный (делённый на количество знаков) натуральный логарифм числа представляемых кодов (чисел) (ln(2)/2=ln(4)/4=0,346...) и занимают второе место после троичной системы счисления.

Необходимыми условиями существования экстремума функции являются существование первой производной и её равенство нулю.
Первая производная функции y=ln(x)/x равна:

$$dy/dx = d(\ln(x)/x)/dx = 1/x^2 - \ln(x)/x^2.$$

Приравняв её нулю получим:

$$1/x^2 - \ln(x)/x^2 = 0,$$
$$\ln(x)/x^2 = 1/x^2,$$
$$\ln(x) = 1,$$
$$x_0 = e.$$

Достаточными условиями существования локального максимума являются $f'_{+x0} < 0$ и $f'_{-x0} > 0$. Так как слева от точки $x_0 = e$ производная положительная, а справа отрицательная, то, в точке $x_0 = e \approx 2{,}718$ функция $f(x) = \ln(x)/x$ действительно имеет строгий локальный максимум равный ln(e)/e=1/e=0,367... .

Список литературы:

1. Фомин С. В. Системы счисления . - 5-е изд. - М.:Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. - 48 с. - (Попул. лекции по мат.) § 14. Об одном замечательном свойстве троичной системы, стр.37
2. Википедия. Размещение. Размещение с повторениями.
3. Троичная цифровая техника. Ретроспектива и современность. Кушнеров А.
4. Preliminary discussion of the logical design of an electronic computing instrument by Arthur W. Burks, Herman H. Goldstine, John von Neumann. 5.0 The Arithmetic Organ. 5.2 Choice of binary system. Page 7
5. Кодирование тритов. Куликов А.С.
6. Экономичность и точность троичных АЦП последовательного приближения. Троичный АЦП последовательного приближения. Куликов А.С. Рис.7

Куликов А.С., Россия-Русь, Москва, Царицыно, версия 2023.12.08.