

Куликов А. С.

РЯД ФУРЬЕ ДВУХУРОВНЕВОЙ ДВОИЧНОЙ ФУНКЦИИ

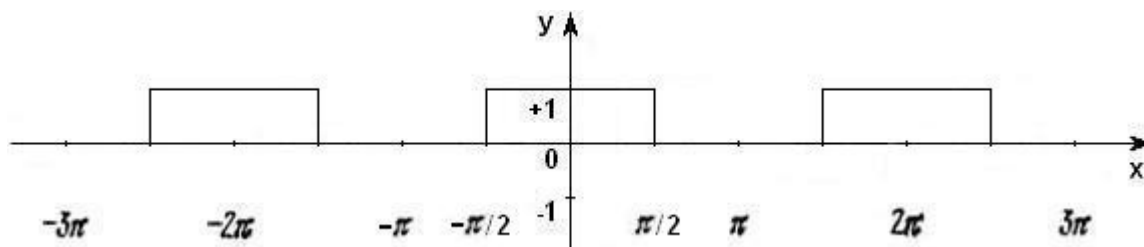


Рис. 1.

Периодическая с периодом 2π функция $f(x)$ (рис. 1) определена следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \quad \text{при} \quad -\pi < x < -\pi/2, \\ f(x) &= +1 \quad \text{при} \quad -\pi/2 \leq x \leq +\pi/2, \\ f(x) &= 0 \quad \text{при} \quad +\pi/2 \leq x \leq +\pi. \end{aligned}$$

Определим коэффициенты Фурье этой функции:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx = (1)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} 0 \cdot dx + \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} 1 \cdot dx + \int_{+\pi/2}^{+\pi} 0 \cdot dx \right] = (2)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} 1 \cdot dx \right] = (3)$$

$$= \frac{1}{\pi} [x]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 1. \quad (4)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx dx = (5)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} 0 \cdot \cos nx \, dx + \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} 1 \cdot \cos nx \, dx + \int_{+\pi/2}^{+\pi} 0 \cdot \cos nx \, dx \right] = (6)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos nx \, dx \right] = (7)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = (8)$$

$$= \frac{\sin(n\pi/2)}{\pi n} - \frac{\sin(-n\pi/2)}{\pi n} = (9)$$

$$= \frac{\sin(n\pi/2)}{\pi n} + \frac{\sin(n\pi/2)}{\pi n} = (10)$$

$$= \frac{2}{\pi n} \sin(n\pi/2) . \quad (11)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, dx = (12)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} 0 \cdot \sin nx \, dx + \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} 1 \cdot \sin nx \, dx + \int_{+\pi/2}^{+\pi} 0 \cdot \sin nx \, dx \right] = (13)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} 1 \cdot \sin nx \, dx \right] = (14)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = (15)$$

$$= -\left[\frac{\cos nx}{\pi n} \right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = (16)$$

$$= -\frac{\cos(n\pi/2)}{\pi n} + \frac{\cos(-n\pi/2)}{\pi n} = (17)$$

$$= -\frac{\cos(n\pi/2)}{\pi n} + \frac{\cos(n\pi/2)}{\pi n} = 0, \text{ что и должно быть для чётной функции. } (18)$$

Таким образом, ряд Фурье заданной двухуровневой двоичной функции имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] = \quad (19)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(n\pi/2)}{n} \cos nx \right]. \quad (20)$$

Литература.

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. т. 2: Учебное пособие для втузов.—13-е изд.—М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985.—560 с. Глава XVII. РЯДЫ ФУРЬЕ